

KULE WIELOWYMIAROWE

Opracował mgr Michał Kosacki.

Niech B_n oznacza kulę euklidesową o promieniu r w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, zaś niech $b_n = \frac{\text{Vol } B_n}{r^n}$ będzie współczynnikiem liczbowym znajdującym się we wzorze określającym $\text{Vol } B_n$. Wówczas prawdziwy jest następujący wzór rekurencyjny:

$$(*) \begin{cases} \text{Vol } B_0 = 1 \\ \text{Vol } B_{n+1} = b_n \int_{-r}^r (r^2 - x^2)^{\frac{n}{2}} dx = r \text{Vol } B_n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t dt. \end{cases}$$

Schematycznie:

Liczba wymiarów	Wolumen		Obszar powierzchniowy
$n = 0$	1		
	↓ (*)		
$n = 1$	$2r$ długość odcinka	$\xrightarrow[\text{po } r]{\text{pochodna}}$	2
	↓ (*)		
$n = 2$	πr^2 pole koła	$\xrightarrow[\text{po } r]{\text{pochodna}}$	$2\pi r$ długość okręgu
	↓ (*)		
$n = 3$	$\frac{4}{3}\pi r^3$ objętość kuli	$\xrightarrow[\text{po } r]{\text{pochodna}}$	$4\pi r^2$ pole sfery
	↓ (*)		
$n = 4$	$\frac{\pi^2}{2}r^4$	$\xrightarrow[\text{po } r]{\text{pochodna}}$	$2\pi^2 r^3$
	↓ (*)		
	itd.		